8. Hálózati folyamok

**Hálózat:**

* Hálózatnak nevezzük egy olyan (G,s,t,c) négyest, amelyben G egy irányított gráf, aminek s (termelő), t (fogyasztó) különböző csúcsai, továbbá G minden e élét jellemzi egy nemnegatív c(e) szám, az e él úgynevezett kapacitása (súlyfüggvény) c: E(G)->R+. (Lehetnek benne irányított körök)

**Folyam:**

* A (G,s,t,c) hálózatban folyamnak mondjuk egy olyan f függvényt, mely G minden éléhez egy számot rendel úgy, hogy:
  + a folyam minden élén legfeljebb kapacitásnyi lehet {o<=f(e)<=c(e)}
  + minden s-től és t-től különböző pontra igaz, hogy a befolyó folyam összmennyisége azonos a kifolyóéval (Kirchoff-szabály).

**Folyamnagyság/ folyamérték:**

* az f folyam nagysága az a nettó folyammennyiség, ami s-ből kifolyik.
* jele:
* -{vs (s-be menő élek)}

**st-vágás:**

* X a G csúcsainak s-t tartalmazó, de t-től diszjunkt részhalmaza. Az X és V(G)\X között futó éleinek egy halmazát a hálózat egy st-vágásának nevezzük
* Szemléletesen: Úgy hagyunk el éleket a gráfból, hogy már ne lehessen eljutni s-ből t-be. Ezeknek az éleknek a halmaza egy vágás.

**st-vágás kapacitása**

* Az X által meghatározott st-vágás kapacitása az X-ből V(G)\X-be futó élek kapacitásösszege.

**Ford-Fulkerson tétel**

* Ha (G,s,t,c) egy véges hálózat, akkor létezik egy f folyam, és egy 𝑠 ∈ 𝑋 ⊆ V(G)\{𝑡} részhalmaz úgy, hogy az 𝑚𝑓 folyamnagyság azonos az X által definiált st-vágás kapacitásával.
* Röviden: A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével.
* Következménye: hogy ha egy adott hálózatban találunk egy folyamot és egy vágást, amiknek az értéke egyenlő, akkor biztosak lehetünk abban, hogy egy maximális folyam ill. egy minimális vágás van a kezünkben.
* bizonyítás:

**Javító utas algoritmus (előre- és visszaélek)**

* Abban segít, hogy hogyan tudjuk megkeresni egy gráfban a maximális folyamértéket.
* Működése:
  + segédgráfot készítünk
    - pontjai ugyanazok, mint az eredetinek
    - berajzolunk minden irányított élt, ami nem telített (ráírjuk, hogy mennyi hely maradt még)
    - berajzolunk minden irányított élt fordított irányítással, amin a folyam értéke nem 0
  + Most ebben a segédgráfban kell egy irányított utat találnunk s-ből t-be. (Pl.: BFS-sel.)
    - Ha ilyen nincs, akkor a folyamunk maximális.
    - Ha van, akkor ez egy javítóút, vagyis az eredeti gráfban ezen az úton tudjuk növelni a folyamértéket. Ehhez az eredeti irányítású éleket csökkentjük, a fordított irányításúakon növeljük, mindegyiken ugyanannyival. Ez az ugyanannyi legyen olyan nagy, amennyire csak lehet úgy, hogy egy él se lépje túl a kapacitását ill. egy f(e) se csökkenjen 0 alá. Ezután az új (immár nagyobb) folyamhoz új segédgráfot készítünk.
  + (A segédgráfos-javítóutas algoritmust használva megkeressük a maximális folyamot (vagy az egyik ilyet). Azt a segédgráfot használjuk, amiben már nem volt s-t út. Megkeressük azokat a pontokat, amik s-bıl elérhetık, ık alkotják az X halmazt. Ehhez a halmazhoz tartozó vágás minimális vágás lesz.)

**Egészértékűség (EgÉr) lemma**

* Ha a (G,s,t,c) hálózatban minden e él c(e) kapacitása egész szám, akkor létezik olyan minimális f folyam, hogy f a G gráf minden élén egészet vesz fel. Az ilyen folyamot egész folyamnak hívjuk.
* bizonyítás: Az FF algoritmust fenntartva, mindig egész értékű folyamatokat találunk.

**Edmonds-Karp tétel:**

* Ha a (G,s,t,c) hálózatban a maximális folyamot a javító utas algoritmussal keressük, és mindig egy legkevesebb élből álló javító út mentén növelünk, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépésszám felülről becsülhető |V(G)| polinomjával. Valós időben befejezhető.

Illusztráció ?

Általánosított hálózatok visszavezetése szokásos hálózatra: